

Asymptotische Entwicklungen der Korrelationsfunktion von Integralfunktionalen differenzierbarer schwach korrelierter Prozesse

Jürgen vom Scheidt, Hendrik Weiß

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Germany

Zusammenfassung

Lineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen eignen sich zur Modellierung von Schwingungssystemen, die zufällig erregt werden. Die stationäre Lösung beschreibt deren Langzeitverhalten. Für die Korrelationsfunktionen der stationären Lösung und deren Ableitungen werden asymptotische Entwicklungen angegeben, wenn die zufällige Erregung durch differenzierbare schwach korrelierte Prozesse erfolgt. Die Eigenschaften differenzierbarer schwach korrelierter Prozesse werden diskutiert und B-Spline vorgestellt, die Korrelationsfunktionen solcher Prozesse sind.

Verschiedene Darstellungen der stationären Lösung führen zu verschiedenen asymptotischen Entwicklungen für die Korrelationsfunktion. An einem Beispiel werden beide verglichen und der Einfluß der Differenzierbarkeit der Erregung untersucht.

Schlagworte: asymptotische Entwicklung, zufällige Schwingung, differenzierbare Zufallsfunktion, schwach korrelierte Zufallsfunktion, Korrelationsfunktion, stationäre Lösung

MSC2000 Klassifikation: 70L05, 34F05, 60G12

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit linearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\sum_{l=0}^r A_l x^{(l)}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k f^{(k)}(t, \omega) \quad (1.1)$$

für einen vektoriellen Zufallsprozeß $x(t, \omega)$ auf $\mathbb{R} \times \Omega$ mit Werten in \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$, wobei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist mit einer geeigneten σ -Algebra \mathcal{A} von Teilmengen aus Ω . Desweiteren sind A_0, \dots, A_r $(n \times n)$ -Matrizen und $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_p$ $(n \times m)$ -Matrizen mit konstanten deterministischen komplexwertigen Einträgen. Der inhomogene Term

$$\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k f^{(k)}(t, \omega)$$

enthält die zufällige Erregung $f(t, \omega)$ und deren Ableitungen bis zur Ordnung p , die auf $\mathbb{R} \times \Omega$ definiert sind und Werte in \mathbb{C}^m haben. Für alle betrachteten Zufallsprozesse wird vorausgesetzt, dass die zweiten Momente existieren. Es wird angenommen, dass der Erregungsprozeß $f(t, \omega)$ p -mal im quadratischen Mittel (i.q.M.) differenzierbar ist und alle Ableitungen $f(t, \omega), \dots, f^{(p)}(t, \omega)$ schwach stationär sowie im i.q.M. und fast sicher (f.s.) stetig sind.

Das Ziel ist es, Darstellungen der stationären Lösung anzugeben und deren Korrelationsfunktion zu berechnen bzw. mittels asymptotischen Entwicklungen zu approximieren, wenn die Erregung mittels differenzierbarer ε -korrelierter Prozesse, einer speziellen Klasse von schwach korrelierten Prozessen ([11, 12]), modelliert wird. Die wesentliche Eigenschaft von schwach korrelierten Prozessen besteht darin, dass sie keine „Fernwirkung“ besitzen. Die Werte eines solchen Prozesses an zwei Punkten sind unkorreliert, wenn der Abstand dieser Punkte die Größe $\varepsilon > 0$, die als Korrelationslänge bezeichnet wird, überschreitet.

Die beschriebene Problemstellung tritt zum Beispiel bei der Untersuchung des Langzeitverhaltens der Systemantwort von diskreten Schwingungssystemen mit permanenter zufälliger Erregung auf ([8, 11, 13, 17, 19, 22]). Schwingungsmodelle stellen im allgemeinen Randanfangswertprobleme für eine zeit-, orts-, und zufallsabhängige Funktion dar. Durch Diskretisierung bezüglich der Ortskoordinaten entstehen (großdimensionierte) Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung ($r = 2$).

Differentialgleichungssysteme (1.1) eignen sich ebenfalls zur Modellierung von differenzierbaren Zufallsprozessen ([6, 22]). Im Gegensatz zum vielbenutzten White-noise-Ansatz ($f(t, \omega)$ Weißes Rauschen) können ε -korrelierte Prozesse eine beliebige Glattheit besitzen. Damit wird eine bessere Anpassung der Eigenschaften an reale Erregungsprozesse möglich und der schwachen Korreliertheit Rechnung getragen.

Die Untersuchung von Schwingungssystemen erfolgt häufig in modalen Koordinaten, was zu komplexwertigen Systemmatrizen führt. Deshalb sollen die Darlegungen für diesen allgemeineren Fall erfolgen, reellwertige Systeme sind als Spezialfall enthalten.

Im zweiten Abschnitt werden zunächst die Grundlagen der Korrelationsanalyse für Systeme erster Ordnung ($r = 1$) zusammengefaßt. Da sich Systeme höherer Ordnung ebenfalls in diese Gestalt überführen lassen, ergeben sich verschiedene Vorgehensweisen bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion der Ableitungen $x^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, p$ der stationären Lösung des Ausgangsproblems.

Auf der Basis der Definition werden im dritten Abschnitt Eigenschaften und Kenngrößen von ε -korrelierten Prozessen ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ vorgestellt. Für Entwicklungen der Korrelationsfunktionen für $\varepsilon \rightarrow 0$ der stationären Lösung von (1.1) ist es wichtig, dass die Korrelationsfunktionen einer Familie von ε -korrelierten Prozessen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ durch die Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses generiert werden. Damit läßt sich die gesamte Familie $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ anhand einer Korrelationsfunktion charakterisieren. Korrelationsfunktionen von differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen findet man in der Klasse der B-Spline. Deren Konstruktion und Eigenschaften sind Gegenstand des vierten Abschnittes.

Im Mittelpunkt des fünften Abschnitts steht die Bestimmung von asymptotischen Entwicklungen der Korrelationsfunktion der stationären Lösung. Auf der Basis dieser Entwicklungen ergeben sich für festes ε Approximationen, unter bestimmten Voraussetzungen sogar gleichmäßig konvergente Reihendarstellungen, mit denen man die exakte Korrelationsfunktion errechnen kann. Diese Vorgehensweise wird im sechsten Abschnitt am Beispiel des Einmassenschwingers erläutert.

Im folgenden wird folgende Notation verwendet.

Der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} wird mit $\mathbf{E}\{\cdot\}$ bezeichnet. Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier vektorieller Zufallsprozesse $y(t, \omega)$ und $z(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}$ mit Werten in \mathbb{C}^n sei durch

$$R_{yz}(t, s) = \mathbf{E} \{ [y(t) - \mathbf{E}\{y(t)\}] [z(s) - \mathbf{E}\{z(s)\}]^* \}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

definiert. Im Fall schwach stationärer Zufallsprozesse bezeichnet

$$R_{yz}(\tau) = \mathbf{E} \{ [y(t) - \mathbf{E}\{y(t)\}] [z(t + \tau) - \mathbf{E}\{z(t + \tau)\}]^* \}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

die Kreuzkorrelationsfunktion. Bei Untersuchungen im Frequenzbereich ist die Spektraldichte eines schwach stationären Prozesses $z(t, \omega)$

$$S_{zz}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\tau} R_{zz}(\tau) d\tau, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

von Interesse.

2 Stationäre Lösung

Das System (1.1) läßt sich mittels

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(r-1)} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} O \\ \vdots \\ O \\ I \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O \\ \vdots & O & I & O & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & O & \cdots & O & I \\ -A_r^{-1}A_0 & -A_r^{-1}A_1 & \cdots & -A_r^{-1}A_{r-2} & -A_r^{-1}A_{r-1} \end{pmatrix}$$

in ein lineares System

$$\dot{z}(t, \omega) = Az(t, \omega) + g(t, \omega) \quad (2.1)$$

der Dimension nr mit Erregung

$$g(t, \omega) = T\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega)$$

umwandeln, wobei

$$P_k = TA_r^{-1}\tilde{P}_k$$

gesetzt wird. Bei der Betrachtung von Systemen wird immer gefordert, dass die entsprechende Matrix A stabil ist, d. h. alle Eigenwerte von A besitzen einen negativen Realteil. Ist $g(t, \omega)$ ein stationärer, im quadratischen Mittel und f.s. pfadweise stetiger Prozeß, dann existiert nach [4] die eindeutige stationäre Lösung

$$z(t, \omega) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} g(s, \omega) ds \quad (2.2)$$

im quadratischen Mittel und f.s. pfadweise. Ein Prozeß $z(t, \omega)$ heißt dabei stationäre Lösung des Systems, wenn $z(t, \omega)$ die Differentialgleichung erfüllt, stationär und mit $g(t, \omega)$ stationär verbunden ist, d. h. der Prozeß $\begin{pmatrix} z \\ g \end{pmatrix}$ stationär ist. Im Vergleich zur Lösung

$$\tilde{z}(t, \omega) = e^{A(t-t_0)} \tilde{z}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s, \omega) ds$$

des Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{z}}(t, \omega) = A\tilde{z}(t, \omega) + g(t, \omega), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$$

beschreibt die stationäre Lösung das Langzeitverhalten bei permanent zugeführter zufälliger Erregung $g(t, \omega)$, also ohne den Einfluß des Anfangszustandes.

Die Korrelationsfunktion von $z(t, \omega)$ berechnet sich nach

$$R_{zz}(\tau) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{A(t-u)} R_{gg}(v-u) e^{A^*(t+\tau-v)} dv du ,$$

die Kenntnis der Korrelationsfunktion $R_{gg}(\cdot)$ des schwach stationären Prozesses $g(t, \omega)$ reicht zur Bestimmung von $R_{zz}(\cdot)$ aus. Die konkrete Berechnung erweist sich jedoch in vielen Fällen als schwieriges Vorhaben. Insbesondere bei großdimensionierten Systemen greift man auf Approximationsverfahren zurück, die zum Beispiel auf Modellreduktion basieren. Beispiele sind die Methoden der modalen Dekomposition und der optimalen Projektion ([15, 22]). Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Funktion $g(t, \omega)$ so zu modellieren, dass die Berechnung vereinfacht wird, z. B. mittels Weißen Rauschens. Eine Untersuchung im Frequenzbereich ist ebenfalls möglich ([8, 13, 19]).

Die Darstellung der stationären Lösung von (1.1) und deren Ableitungen lassen sich aufgrund spezieller Eigenschaften der zugehörigen Matrixexponentialfunktion $G(t) = e^{At}$ konkretisieren. Dazu wird

$$\tilde{G}(t) := \tilde{T} e^{At} T \quad \text{mit} \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

gesetzt, d. h. $\tilde{G}(t)$ ist der obere rechte $(n \times n)$ -Block der Matrixexponentialfunktion $G(t)$.

Lemma 2.1

Die stationäre Lösung von (1.1) und deren Ableitungen haben für $i = 0, \dots, r$ die Darstellung

$$x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p \tilde{G}^{(i+k)}(t-s) \tilde{P}_k \right) f(s, \omega) ds$$

$$+ \begin{cases} 0 & 0 \leq i \leq r-p-1 \\ \sum_{k=0}^{p+i-r} \left(\sum_{j=r-i}^{p-k} \tilde{G}^{(j+i-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega) & r-p \leq i \leq r-1 \\ \sum_{k=0}^p \left(\tilde{P}_k + \sum_{j=1}^{p-k} \tilde{G}^{(j+r-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega) & i = r \end{cases}$$

Beweis.

Die $(nr \times nr)$ -dimensionale Matrixexponentialfunktion $G(t) = e^{At}$ ist Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$G'(t) = AG(t), \quad G(0) = I$$

(siehe z. B. [1]). Für die $(nr \times n)$ -dimensionale Matrixfunktion

$$Y(t) := G(t)T = e^{At}T$$

gilt

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = T.$$

Die Matrixfunktion $Y(t)$ hat aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A die Darstellung

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{G}(t) \\ \tilde{G}'(t) \\ \vdots \\ \tilde{G}^{(r-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrixfunktion $\tilde{G}(t)$ hat dann die Eigenschaften

$$\tilde{G}^{(i)}(t) = \tilde{T}A^i e^{At}T = \tilde{T}A^i Y(t), \quad i = 0, 1, \dots,$$

$$\tilde{G}^{(i)}(0) = O, \quad i = 0, \dots, r-2 \quad \text{und} \quad \tilde{G}^{(r-1)}(0) = I.$$

Für die stationäre Lösung gilt damit

$$x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{g}(s, \omega) ds, \quad i = 0, \dots, r-1$$

und

$$x^{(r)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(r)}(t-s) \tilde{g}(s, \omega) ds + \tilde{g}(t, \omega).$$

Nach Anwendung der partiellen Integration

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{P}_k f^{(k)}(s, \omega) ds \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{G}^{(i+j)}(0) \tilde{P}_k f^{(k-j-1)}(t, \omega) + \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i+k)}(t-s) \tilde{P}_k f(s, \omega) ds \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Zur Beurteilung von $x^{(i)}(t, \omega)$, $i = 0, \dots, r-p$, sind also nur Kenntnisse über die Erregungsfunktion $f(t, \omega)$ erforderlich, nicht von deren Ableitung. Außerdem wird es im weiteren von Bedeutung sein, ob ein Zufallsprozeß als Integralfunktional von $f(t, \omega)$ darstellbar ist oder ob noch Randterme hinzukommen.

Im Fall von Schwingungssystemen ($r = 2$) sind für die technische Interpretation neben der Auslenkung und der Geschwindigkeit auch besonders die Beschleunigungen ($i = 2$) von Bedeutung. Die obigen Überlegungen zeigen, dass die für Schwingungssysteme typischen Werte $p = 1, 2$ eine Modellierung der Erregung $f(t, \omega)$ durch differenzierbare Prozesse und eine Analyse der für Approximationsverfahren notwendigen Kenngrößen erfordern.

3 ε -korrelierte Prozesse

Das Konzept der ε -korrelierten Prozesse baut auf der Theorie der schwach korrelierten Prozesse auf. Die exakte Definition schwach korrelierter Prozesse ist z. B. in [9, 11, 12, 20] zu finden. Insbesondere zeigt sich, dass für die Korrelationsanalyse von Integralfunktionalen von schwach korrelierten Prozessen die Eigenschaft der ε -Korreliertheit entscheidend ist, bei deren Definition lediglich Eigenschaften der zweiten Momente eine Rolle spielen.

Definition 3.1

Ein stochastischer Prozeß ${}^{\varepsilon}f(t, \omega)$ mit $t \in D \subset \mathbb{R}$ und Werten im \mathbb{C}^n heißt ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon > 0$, wenn

$$R_{{}^{\varepsilon}f}(t, s) = \mathbf{E} \{ [{}^{\varepsilon}f(t) - \mathbf{E} \{ {}^{\varepsilon}f(t) \}] [{}^{\varepsilon}f(s) - \mathbf{E} \{ {}^{\varepsilon}f(s) \}]^* \} = 0 \quad \forall t, s \in D \text{ mit } |t - s| \geq \varepsilon$$

gilt.

Für Familien $({}^{\varepsilon}f)_{\varepsilon > 0}$ von ε -korrelierten Prozessen wird folgende Annahme vereinbart, die ohne besonderen Vermerk im weiteren gelten soll.

Annahme 3.2

1. Die Zufallsfunktionen $({}^{\varepsilon}f)_{\varepsilon > 0}$ sind zentriert, d. h. $\mathbf{E} \{ {}^{\varepsilon}f(t) \} = 0$.
2. Die Funktionen $({}^{\varepsilon}f)_{\varepsilon > 0}$ sind schwach stationäre Prozesse mit den Korrelationsfunktionen

$$\mathbf{E} \{ {}^{\varepsilon}f(t) {}^{\varepsilon}f^*(s) \} = R_{{}^{\varepsilon}f}(s - t), \quad \text{wobei}$$

3. für die Korrelationsfunktionen $(R_{{}^{\varepsilon}f}(\cdot))_{\varepsilon > 0}$ eine Darstellung durch eine Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ eines 1-korrelierten, schwach stationären Prozesses existiert mit

$$R_{{}^{\varepsilon}f}(s) = R\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \text{und}$$

4. die Funktionen $({}^{\varepsilon}f)_{\varepsilon > 0}$ sind im quadratischen Mittel stetig, woraus die Stetigkeit der Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ folgt.

Die Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ des 1-korrelierten Prozesses zu einer Familie $(\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ von ε -korrelierten Prozessen wird kurz 1-korrelierte Korrelationsfunktion genannt.

Für die späteren Entwicklungen werden gewisse Kenngrößen von Korrelationsfunktionen benötigt, die an dieser Stelle bereits diskutiert werden sollen.

Definition 3.3

Sei $R(\cdot)$ eine 1-korrelierte Korrelationsfunktion. Für $j = 0, 1, 2, \dots$ heißen die komplexwertigen Matrizen

$$\kappa_j := \int_0^1 u^j R(u) du, \quad \mu_j := \int_{-1}^1 u^j R(u) du$$

die Korrelationsmomente der Ordnung j .

Außerdem kommen neben den Korrelationsmomenten weitere Kenngrößen ε -korrelierter Funktionen vor, sogenannte Korrekturterme der Korrelationsmomente.

Definition 3.4

Zu einer 1-korrelierten Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ heißen die Funktionen

$$\kappa_j(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\infty} (u - \beta)^j R(u) du, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Korrekturterme der Korrelationsmomente.

Von Bedeutung werden die Korrekturterme für die Werte $\beta = 0$, und $\beta = 2\alpha$ sein. Deshalb wird noch die Bezeichnung

$$\kappa_{i,j}(\alpha) := \kappa_j(\alpha, i\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} (u - i\alpha)^j R(u) du, \quad i = 0, 2$$

eingeführt.

Korollar 3.5

Es gelten folgende Beziehungen für $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu_j = \kappa_j + (-1)^j \kappa_j^*,$$

$$\kappa_j = \kappa_j(0, 0) = \kappa_{i,j}(0), \quad i = 0, 2$$

und

$$\kappa_{0,0}(\alpha) = \kappa_{2,0}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

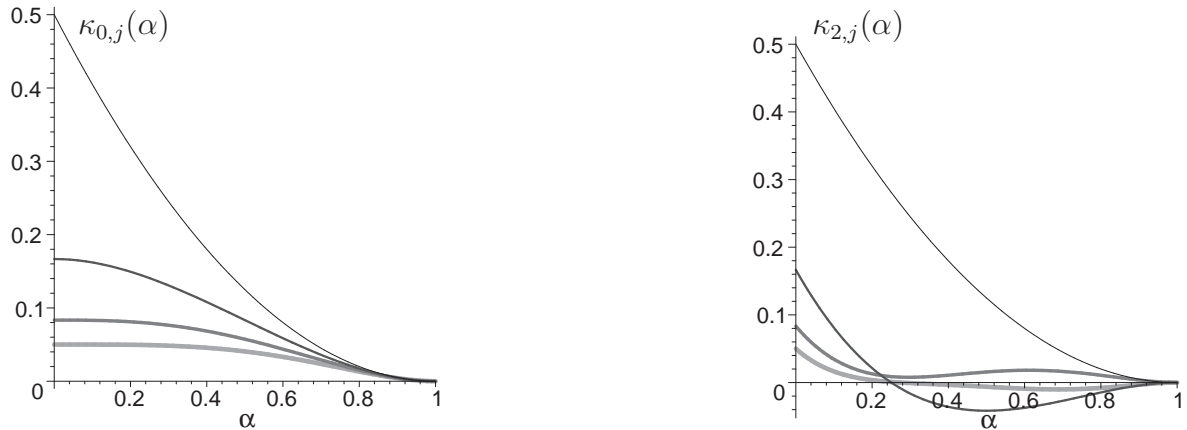


Abbildung 3.1: Korrekturterme der Korrelationsmomente $\kappa_{0,j}(\alpha)$ und $\kappa_{2,j}(\alpha)$, $j = 0, 1, 2, 3$ (Linien von dünn und dunkel nach dick und hell) für die Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$

Beispiel 3.6 Die Korrelationsfunktion

$$R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$$

ist 1-korreliert. Man berechnet die Korrekturterme für $\alpha \in [0, 1]$

$$\kappa_j(\alpha, \beta) = \frac{(1 - \beta)^{j+2} - (\alpha - \beta)^{j+2}}{(j+1)(j+2)} - \frac{(\alpha - \beta)^{j+1}(1 - \alpha)}{j+1},$$

die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{1}{(j+1)(j+2)}$$

und die Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\pi \alpha^2}.$$

Die Korrekturterme $\kappa_{0,j}(\alpha)$ und $\kappa_{2,j}(\alpha)$ sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Weitere Beispiele von Korrelationsfunktionen 1-korrelierter Prozesse findet man in [20].

Sowohl die Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel als auch die ε -Korreliertheit eines Prozesses stehen im Zusammenhang mit Eigenschaften der Korrelationsfunktion. So gibt es notwendige und hinreichende Bedingungen an die Korrelationsfunktion für die Differenzierbarkeit des Prozesses [13, 19].

Im Speziellen ist ein schwach stationärer Prozeß $f(t, \omega)$ mit $2n$ -mal stetig differenzierbarer Korrelationsfunktion n -mal im quadratischen Mittel differenzierbar, es gilt

$$R_{f^{(k)} f^{(l)}}(\tau) = (-1)^k R_{ff}^{(k+l)}(\tau), \quad k, l = 0, \dots, n. \quad (3.1)$$

Die Existenz eines i.q.M. stetigen schwach stationären Prozesses zu einer vorgegebenen stetigen, integrierbaren und positiv definiten Funktion $R(\cdot)$ wird durch den Satz von Chintschin gesichert (siehe z. B. [7, 19]). Auf dieser Grundlage wurde in [12] der Nachweis erbracht, dass unendlich oft differenzierbare ε -korrelierte Prozesse existieren. Die angegebene beliebig oft differenzierbare Korrelationsfunktion (siehe auch [11, 13]) ist aber eher von theoretischer Bedeutung und für die Korrelationsanalyse unzweckmäßig.

In [9] wurde eine konstruktive Methode vorgeschlagen, um Korrelationsfunktionen differenzierbarer 1-korrelierter Prozesse zu generieren. Dabei wird die Differenzierbarkeit durch geeignetes Integrieren erhöht.

Bevor im nächsten Abschnitt differenzierbare B-Spline-Korrelationsfunktionen vorgestellt werden, sollen Eigenschaften der Korrekturterme zu differenzierbaren 1-korrelierten Korrelationsfunktionen angegeben werden. Mit

$$\kappa_j^{(n)}(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\infty} (u - \beta)^j R^{(n)}(u) du$$

wird der Korrekturterm des j -ten Korrelationsmoments der n -ten Ableitung der 1-korrelierten, n -mal differenzierbaren Korrelationsfunktion bezeichnet. Analog definiert man

$$\kappa_j^{(n)} = \kappa_j^{(n)}(0, 0),$$

woraus sich unter Beachtung von

$$R^{(n)}(\tau) = (-1)^n R^{(n)*}(-\tau)$$

die Beziehung

$$\mu_j^{(n)} = \kappa_j^{(n)} + (-1)^{j+n} \kappa_j^{(n)*} = (-1)^{j+n} \mu_j^{(n)*}$$

ergibt.

Aufgrund von (3.1) gelten für die Korrekturterme eines n -mal differenzierbaren 1-korrelierten Prozesses $f(t, \omega)$

$$\kappa_{j, f^{(k)} f^{(l)}}(\alpha, \beta) = (-1)^k \kappa_{j, ff}^{(k+l)}(\alpha, \beta), \quad k, l = 0, \dots, n. \quad (3.2)$$

Beziehungen zwischen den Korrekturtermen zu Ableitungen von Korrelationsfunktionen und der Korrelationsfunktion stellt folgendes Lemma her.

Lemma 3.7

Sei $R(\cdot)$ eine n -mal differenzierbare, 1-korrelierte Korrelationsfunktion. Dann gilt für $j = 0, 1, \dots$

$$\kappa_j^{(n)}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\min\{n, j\}-1} \frac{(-1)^{l+1} j!}{(j-l)!} (\alpha - \beta)^{j-l} R^{(n-l-1)}(\alpha) + \begin{cases} (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(\alpha) & j < n \\ (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n}(\alpha, \beta) & j \geq n \end{cases}.$$

Beweis.

Sei $k := \min\{n, j\}$. Die k -fache partielle Integration ergibt für $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^j R^{(n)}(u) du &= (u - \beta)^j R^{(n-1)}(u) \Big|_{u=\alpha}^1 - j \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-1} R^{(n-1)}(u) du \\
 &= -(\alpha - \beta)^j R^{(n-1)}(\alpha) + j(\alpha - \beta)^{j-1} R^{(n-2)}(\alpha) \\
 &\quad + j(j-1) \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-2} R^{(n-2)}(u) du \\
 &= \dots = \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{l+1} j!}{(j-l)!} (\alpha - \beta)^{j-l} R^{(n-l-1)}(\alpha) + (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du.
 \end{aligned}$$

Im Fall $k = j < n$ berechnet man

$$\begin{aligned}
 (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du &= (-1)^j j! \int_{\alpha}^1 R^{(n-j)}(u) du \\
 &= (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(\alpha),
 \end{aligned}$$

und für $k = n \leq j$ ist

$$\begin{aligned}
 (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du &= (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-n} R(u) du \\
 &= (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n}(\alpha, \beta).
 \end{aligned}$$

□

Die Aussage von Lemma 3.7 lässt sich leicht auf die Korrekturterme

$$\kappa_{i,j}^{(n)}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} (u - i\alpha)^j R^{(n)}(u) du$$

und die Korrelationsmomente $\kappa_j^{(n)}$ übertragen.

Im Fall eindimensionaler, reellwertiger Prozesse folgt

$$\kappa_j^{(n)} = \begin{cases} 0 & j < n, \ n - j \text{ gerade} \\ (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(0) & j < n, \ n - j \text{ ungerade} \\ (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n} & j \geq n \end{cases} \quad (3.3)$$

Das heißt insbesondere, dass alle geraden Korrelationsmomente der n -ten Ableitung eines Prozesses bis zur Ordnung $2n - 2$ verschwinden,

$$\kappa_{2k}^{(2n)} = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1,$$

woraus folgt

$$\mu_k^{(2n)} = 0, \quad k = 0, \dots, 2n - 1.$$

4 B-Spline-Korrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt sollen B-Spline definiert werden, die differenzierbare 1-korrelierte Korrelationsfunktionen sind. Auf eine allgemeine Definition von B-Spline mittels Dividierter Differenzen soll verzichtet werden, da es für den hier betrachteten Fall äquidistanter Knoten die definierende rekursive Darstellung von B-Spline zu einer streng wachsenden Folge von Knoten genügt ([3, 10]).

Definition 4.1

Die i -ten B-Spline der Ordnung $m \geq 1$ zur Folge von Zahlen $t_i < \dots < t_{i+m}$ sind stückweise definierte Funktionen aus Polynomen des Grades $m - 1$, die folgender Rekursion genügen:

$$\begin{aligned} m = 1: \quad B_i^1(t) &= \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \\ m \geq 2: \quad B_i^m(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} B_i^{m-1}(t) + \frac{t_{i+m} - t}{t_{i+m} - t_{i+1}} B_{i+1}^{m-1}(t). \end{aligned}$$

Die Zahlen $t_i < \dots < t_{i+m}$ werden auch Knoten genannt.

Die B-Spline $B_0^m(\cdot)$ der Ordnung m zu den äquidistanten Knoten $t_i = -1 + ih$, $i = 0, \dots, m$ mit Abstand $h = \frac{2}{m}$ werden mit

$$R^m(\cdot) := B_0^m(\cdot)$$

bezeichnet. Die Eigenschaften dieser Splinefunktionen in folgendem Satz zusammengefaßt.

Satz 4.2

Für $k \geq 1$ sind die B-Spline $R^{2k}(\cdot)$ 1-korrelierte Korrelationsfunktionen eines $(k - 1)$ -mal i.q.M. stetig differenzierbaren schwach stationären Prozesses. Die B-Spline $R^m(\cdot)$ haben folgende Eigenschaften:

1. Die Funktionen $R^m(\cdot)$ genügen der Rekursion

$$\begin{aligned} R^1(t) &= \mathbf{1}_{[-1, 1)}(t), \\ m \geq 2: \quad R^m(t) &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t) R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) + (1-t) R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) \right]. \end{aligned}$$

2. Es gilt für $m = 1, 2, \dots$ die explizite Darstellung

$$R^m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \left(\frac{m}{2}(t+1) - i \right)_+^{m-1},$$

wenn

$$(t-s)_+^0 := \begin{cases} 0 & t < s \\ 1 & t \geq s \end{cases}$$

gesetzt wird.

3. Die Funktionen $R^m(\cdot)$ sind für $m \geq 2$ gerade, d. h. es gilt

$$R^m(t) = R^m(-t).$$

4. Die Funktionen $R^{2k}(\cdot)$ haben für $k = 1, 2, \dots$ die Spektraldichten

$$S^k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} R^{2k}(t) dt = \frac{k^{2k-1} 2^{k-1}}{\pi} \frac{(1 - \cos(\frac{\alpha}{k}))^k}{\alpha^{2k}} \geq 0.$$

5. Für $m \geq 2$ ist die Funktion $R^m(\cdot)$ $(m-2)$ -mal stetig differenzierbar,

$$R^m(\cdot) \in C^{m-2}(\mathbb{R}),$$

die $(m-2)$ -te Ableitung ist eine stückweise lineare Funktion.

6. Für $m \geq 2$ gilt $R^m(t) > 0$ für $t \in (-1, 1)$ und $R^m(t) = 0$ sonst.

Beweis.

Die Behauptung des Satzes folgt aus den Eigenschaften 4. bis 6. Die Ausführungen sind im wesentlichen an [10] angelehnt.

1. Man betrachtet zunächst die B-Spline $B^m(\cdot)$ zu den Knoten $0, 1, \dots, m$, die durch die Rekursion

$$\begin{aligned} B^1(t) &= \mathbf{1}_{[0,1)}(t) \\ m \geq 2: \quad B^m(t) &= \frac{tB^{m-1}(t) + (m-t)B^{m-1}(t-1)}{m-1}. \end{aligned}$$

gegeben sind. Für B-Spline $B_i^m(t)$ zu beliebigen äquidistanten Knoten t_i, \dots, t_{i+m} mit Abstand $t_{i+1} - t_i = h$ gilt

$$B_i^m(t) = B^m\left(\frac{t-t_i}{h}\right),$$

denn man zeigt mit Induktion nach m

$$B_i^1(t) = \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) = \mathbf{1}_{[0,1)}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) = B^1\left(\frac{t-t_i}{h}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
 B_i^m(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} B_i^{m-1}(t) + \frac{t_{i+m} - t}{t_{i+m} - t_{i+1}} B_{i+1}^{m-1}(t) \\
 &= \frac{(t - t_i) B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) + (t_{i+m} - t) B^{m-1}\left(\frac{t-t_{i+1}}{h}\right)}{(m-1)h} \\
 &= \frac{\frac{t-t_i}{h} B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) + \left(m - \frac{t-t_i}{h}\right) B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h} - 1\right)}{m-1} = B^m\left(\frac{t-t_i}{h}\right).
 \end{aligned}$$

Die Rekursion für die Funktionen $R^m(\cdot)$ folgt nun aus der Beziehung

$$R^m(t) = B^m\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) \quad (4.1)$$

unter Verwendung der Rekursion für die Funktionen $B^m(\cdot)$,

$$\begin{aligned}
 R^m(t) &= B^m\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) \\
 &= \frac{\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) B^{m-1}\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) + \left(m - \left(\frac{m}{2}(t+1)\right)\right) B^{m-1}\left(\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) - 1\right)}{m-1} \\
 &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t) B^{m-1}\left(\frac{m-1}{2}\left(\frac{mt+1}{m-1} + 1\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + (1-t) B^{m-1}\left(\frac{m-1}{2}\left(\frac{mt-1}{m-1} + 1\right)\right) \right] \\
 &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t) R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) + (1-t) R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) \right].
 \end{aligned}$$

2. Die explizite Darstellung ergibt sich unter Verwendung von (4.1) aus der expliziten Darstellung

$$B^m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-1},$$

die sich induktiv unter Verwendung der Rekursion mittels

$$\begin{aligned}
 (m-1)! B^m(t) &= t \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i)_+^{m-2} + (m-t) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i-1)_+^{m-2} \\
 &= t \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i)_+^{m-2} + (t-m) \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m-1}{i-1} (t-i)_+^{m-2} \\
 &= t \sum_{i=0}^m (-1)^i \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] (t-i)_+^{m-2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i m \binom{m-1}{i-1} (t-i)_+^{m-2} \\
 &= t \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2} (t-i) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-1},$$

beweisen läßt, wenn $\binom{m-1}{-1} := 0$ gesetzt wird.

3. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt per Induktion. Für $m = 2$ ermittelt man

$$R^2(t) = (t+1)_+ - 2(t)_+ + (t-1)_+ = (1-|t|)_+.$$

Nimmt man an, die Funktion R^{m-1} sei gerade, so folgt aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} R^m(-t) &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1-t)R^{m-1}\left(\frac{-mt+1}{m-1}\right) + (1+t)R^{m-1}\left(\frac{-mt-1}{m-1}\right) \right] \\ &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1-t)R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) + (1+t)R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) \right] \\ &= R^m(t). \end{aligned}$$

4. Die B-Spline

$$M^m(t) := B^m\left(t + \frac{m}{2}\right) = R^m\left(\frac{2t}{m}\right)$$

können durch Faltung erzeugt werden,

$$M^m(t) = M^i * M^{m-i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M^i(t-s)M^{m-i}(s)ds, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} M^1 * M^{m-1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B^1\left(t-s+\frac{1}{2}\right) B^{m-1}\left(s+\frac{m-1}{2}\right) ds \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-2)!} \binom{m-1}{i} \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(s+\frac{m-1}{2}-i\right)_+^{m-2} ds \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i} \left[\left(t+\frac{m}{2}-i\right)_+^{m-1} - \left(t+\frac{m}{2}-i-1\right)_+^{m-1} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i} \left(t+\frac{m}{2}-i\right)_+^{m-1} + \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i-1} \left(t+\frac{m}{2}-i\right)_+^{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] \left(t+\frac{m}{2}-i\right)_+^{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m}{i} \left(t+\frac{m}{2}-i\right)_+^{m-1} = B^m\left(t+\frac{m}{2}\right) = M^m(t). \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte von $M^1(\cdot)$ wird durch direktes Lösen des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} M^1(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha t} dt = \frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-i\alpha} = \frac{2 \sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}$$

berechnet. Die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen ergibt das Produkt der Fouriertransformierten der einzelnen Funktionen, woraus unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$ folgt

$$\begin{aligned} S^k(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} R^{2k}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} M^{2k}(tk) dt \\ &= \frac{1}{2\pi k} \left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2k})}{\frac{\alpha}{2k}} \right)^{2k} = \frac{k^{2k-1} 2^{k-1} (1 - \cos(\frac{\alpha}{k}))^k}{\pi \alpha^{2k}} \geq 0. \end{aligned}$$

5. Dass die Funktion $R^m(\cdot)$ für $m \geq 2$ zu $C^{m-2}(\mathbb{R})$ gehört, erkennt man an der expliziten Darstellung in 2., da die Funktion $g(t) = (t - i)_+^{m-1}$ $(m-2)$ -mal stetig differenzierbar ist. Die $(m-2)$ -te Ableitung $g^{(m-2)}(t) = (m-1)!(t - i)_+$ ist eine stückweise lineare Funktion.
6. Diese Behauptung wird mittels der Rekursionsformel aus 1. verifiziert. Der Induktionsanfang für $m = 2$ ist aus der Darstellung von $R^2(t) = (1 - |t|)_+$ klar. Die Behauptung gelte nun für $m-1$. In der Rekursionsformel kommen die Funktionen $R^{m-1}(\frac{mt+1}{m-1})$ und $R^{m-1}(\frac{mt-1}{m-1})$ vor. Aufgrund der Annahme für $m-1$ gelten

$$R^{m-1}(\frac{mt+1}{m-1}) > 0 \text{ für } t \in (-1, \frac{m-2}{m}) \text{ und } R^{m-1}(\frac{mt+1}{m-1}) = 0 \text{ sonst,}$$

sowie

$$R^{m-1}(\frac{mt-1}{m-1}) > 0 \text{ für } t \in (-\frac{m-2}{m}, 1) \text{ und } R^{m-1}(\frac{mt-1}{m-1}) = 0 \text{ sonst.}$$

Die Intervalle $(-1, \frac{m-2}{m})$ und $(-\frac{m-2}{m}, 1)$ überschneiden sich für $m \geq 3$. Somit wird aus der Rekursionsformel ersichtlich, dass $R^m(t) > 0$ genau dann gilt, wenn $t \in (-1, 1)$ ist.

□

Die Funktion $R^{2k}(\cdot)$ erhält die Bezeichnung B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung k . Teilt man die Funktion $R^{2k}(\cdot)$ durch den Wert $R^{2k}(0)$, entsteht die normierte B-Spline-Korrelationsfunktion

$$\overline{R}^{2k}(\tau) := \frac{1}{R^{2k}(0)} R^{2k}(\tau),$$

d. h. der zugrunde liegende Prozeß hat eine Varianz von 1. Die Funktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ aus Beispiel 3.6 stimmt gerade mit $\overline{R}^2(\cdot)$ überein.

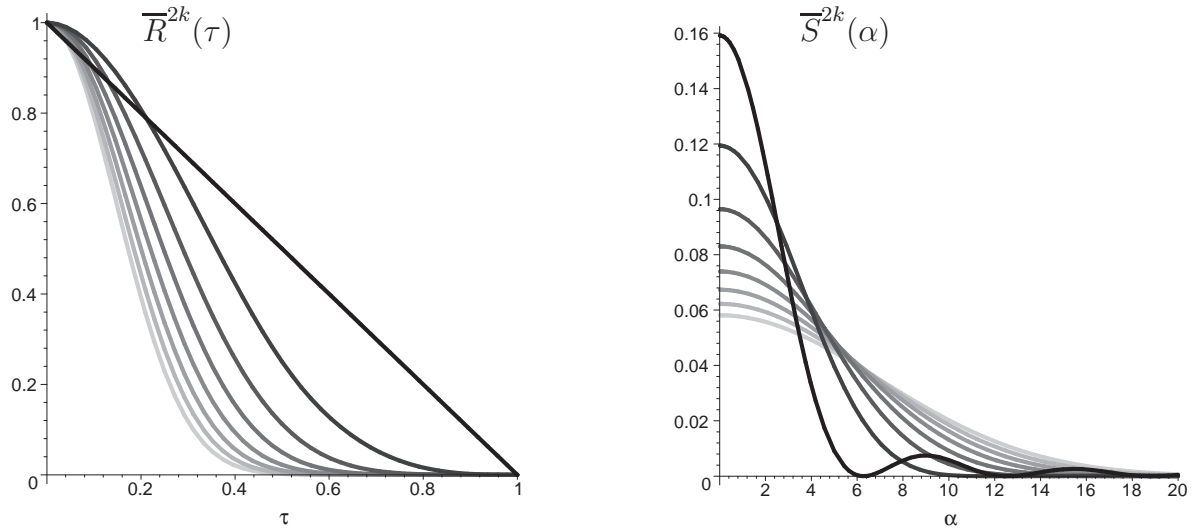


Abbildung 4.1: normierte B-Spline-Korrelationsfunktionen $\overline{R}^{2k}(\tau)$ der Ordnung $k = 1, 2, \dots, 8$ (Linien von dunkel nach hell) und dazugehörige Spektraldichten $\overline{S}^{2k}(\alpha)$

In der Abbildung 4.1 sind die normierten B-Spline-Korrelationsfunktionen $\overline{R}^{2k}(\cdot)$ der Ordnungen $k = 1, 2, \dots, 8$ und deren Spektraldichten $\overline{S}^{2k}(\alpha) := S^{2k}(\alpha)/R^{2k}(0)$ zu sehen.

Beispiel 4.3 Die Funktion

$$\overline{R}^4(\tau) = \begin{cases} 1 - 6|\tau|^2 + 6|\tau|^3 & |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |\tau|)^3 & \frac{1}{2} < |\tau| \leq 1 \end{cases}$$

ist Korrelationsfunktion eines differenzierbaren Prozesses $f(t, \omega)$ und hat die Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{24(1 - \cos(\frac{\alpha}{2}))^2}{\pi\alpha^4}.$$

Prinzipiell sind die Korrekturterme zu stückweise polynomialen Korrelationsfunktionen ebenfalls stückweise Polynomfunktionen und lassen sich analytisch bestimmen. In den folgenden Beispielen wird auf die Angabe der Korrekturterme verzichtet, es werden lediglich die Korrelationsmomente angegeben. Für die Funktion $\overline{R}^4(\cdot)$ sind das die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{3j!(4 - (\frac{1}{2})^j)}{(j+4)!}.$$

Die Ableitung $\dot{f}(t, \omega)$ hat die Korrelationsfunktion

$$R_{\dot{f}\dot{f}}(\tau) = \begin{cases} 12(1 - 3|\tau|) & |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ -12(1 - |\tau|) & \frac{1}{2} < |\tau| \leq 1 \end{cases}.$$

Die Korrelationsmomente der Ableitung des Prozesses berechnen sich unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.2) und (3.3),

$$\kappa_{j,ff} = -\kappa_j^{(2)} = -\frac{12(1 - (\frac{1}{2})^j)}{(j+1)(j+2)}.$$

Beispiel 4.4 Die normierte B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung 3

$$\begin{aligned} \overline{R}^6(\tau) &= \frac{20}{11} R^6(\tau) \\ &= \frac{1}{22} \begin{cases} -810 |\tau|^5 + 810 |\tau|^4 - 180 |\tau|^2 + 22 & |\tau| \leq \frac{1}{3} \\ 405 |\tau|^5 - 1215 |\tau|^4 + 1350 |\tau|^3 - 630 |\tau|^2 + 75 |\tau| + 17 & \frac{1}{3} < |\tau| \leq \frac{2}{3} \\ 81 (1 - |\tau|)^5 & \frac{2}{3} < |\tau| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

hat die Spektraldichte

$$\overline{S}^6(\alpha) = \frac{19440}{11\pi} \frac{(1 - \cos(\frac{\alpha}{3}))^3}{\alpha^6}$$

und die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{20 j! (243 - 128 (\frac{2}{3})^j + 5 (\frac{1}{3})^j)}{11(j+6)!}.$$

Die Korrelationsfunktion und die Spektraldichte sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Außerdem sind die Korrelationsfunktionen und Spektraldichten der ersten und zweiten Ableitung eines Prozesses mit dieser Korrelationsfunktion abgebildet.

5 Entwicklung der Korrelationfunktion

Für die hier betrachteten Funktionen ist folgender Begriff einer asymptotischen Entwicklung zweckmäßig (vgl. auch [2] und [5]).

Definition 5.1

Sei $\varphi(\varepsilon)$ eine auf $(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion. Eine asymptotische Entwicklung der Ordnung N der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ bezüglich Potenzen $\varepsilon^{p_0}, \dots, \varepsilon^{p_N}$ mit $p_0 < \dots < p_N$ ist eine Darstellung

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0(\varepsilon) + \dots + \varphi_N(\varepsilon) + o(\varepsilon^{p_N}), \quad (5.1)$$

wenn für $j = 0, 1, \dots, N$ gilt

$$\varphi(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{j-1} \varphi_k(\varepsilon) = O(\varepsilon^{p_j}). \quad (5.2)$$

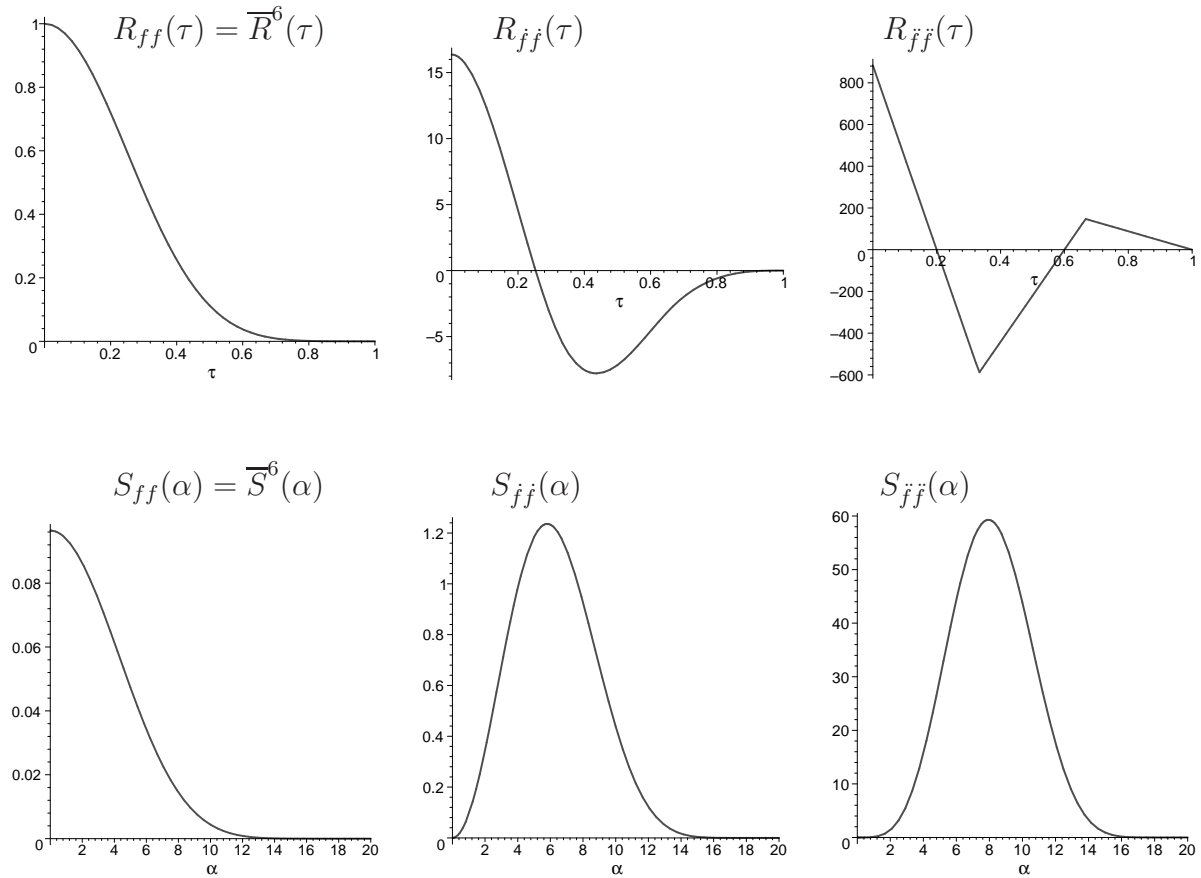


Abbildung 4.2: Korrelationsfunktionen von $f^{(k)}(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, mit $R_{ff}(\tau) = \overline{R}^6(\tau)$ und dazugehörige Spektraldichten

Aus dieser Definition folgt, dass $\varphi_j(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{p_j})$ für $j = 0, \dots, N$ erfüllt ist. Wird mit ${}^N\varphi(\varepsilon) := \sum_{j=0}^N \varphi_j(\varepsilon)$ die Approximation der Ordnung N einer Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ bezeichnet, so ist $\varrho^{N+1}(\varepsilon) := \varphi(\varepsilon) - {}^N\varphi(\varepsilon)$ das Restglied zu dieser Approximation.

Im Gegensatz zum klassischen Fall der Entwicklung in eine Potenzreihe hat der Begriff der asymptotischen Entwicklung den Nachteil, dass eine solche Entwicklung nicht eindeutig ist. Hat man z. B. die Entwicklungsglieder $\varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_{j-1}(\varepsilon)$ festgelegt, dann ist $\varphi_j(\varepsilon)$ nur bis auf einen Summanden der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{p_j})$ eindeutig bestimmt.

5.1 Der Spezialfall $p = 0$

In diesem Abschnitt werden Entwicklungen der Korrelationsfunktion der stationären Lösung (2.2) und deren Ableitung hergeleitet. Für eine übersichtlichere Argumentation wird zunächst der Fall $p = 0$ betrachtet. In diesem Spezialfall hat die stationäre Lösung

die Gestalt eines Integralfunktionalen eines ε -korrelierten Prozesses

$$z(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds$$

mit der Kernfunktion $Q(t) = e^{At} P_0$. Entwicklungen der Korrelationsfunktion solcher Integralfunktionale sind wesentlicher Bestandteil der Theorie schwach korrelierter Prozesse ([11]) und wurden in [18, 20, 22] behandelt.

Unter Berücksichtigung $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) \} = 0$ (vgl. Annahme 3.2) ergeben sich die Erwartungswertfunktion $\mathbf{E} \{ z(t) \} = 0$ und die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \mathbf{E} \{ z(t) z^*(t+\tau) \} \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q(t-u) R_{{}^\varepsilon f {}^\varepsilon f}(v-u) Q^*(t+\tau-v) dv du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q(u) R_{{}^\varepsilon f {}^\varepsilon f}(u+\tau-v) Q^*(v) dv du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q(u) R \left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon} \right) Q^*(v) dv du. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bevor die Ergebnisse in einem Satz präsentiert werden, soll die Notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für Ausdrücke der Art

$$\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle := \int_0^\infty Q_k(u) B Q_l^{(j)*}(u+\tau) du$$

eingeführt werden. Dabei handelt es sich um ein Integral über ein Produkt von drei matrixwertigen Funktionen, wobei die mittlere Funktion nicht von der Integrationsvariable abhängt, aber aufgrund der Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation im Integral verbleiben muß. Dabei sei die Funktion $q_{kl}^j(\tau)$ selbst durch

$$q_{kl}^j(\tau) := \langle q_{kl}^j(\tau), I \rangle = \int_0^\infty Q_k(u) Q_l^{(j)*}(u+\tau) du$$

bestimmt. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \langle q_{kl}^j(\tau), B_1 + B_2 \rangle &= \langle q_{kl}^j(\tau), B_1 \rangle + \langle q_{kl}^j(\tau), B_2 \rangle \\ (\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle)^* &= \langle q_{kl}^{j*}(\tau), B^* \rangle. \end{aligned}$$

Für komplexwertige Größen B zerfällt der Ausdruck in das Produkt

$$\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle = q_{kl}^j(\tau) B.$$

Die Basis der Entwicklung der Korrelationsfunktion (5.3) bildet die Taylorentwicklung der Kernfunktion $Q(\cdot)$. Die Matrixexponentialfunktion e^{At} ist beliebig oft differenzierbar und für eine stabile Matrix A sind alle Ableitungen aus $L_1([0, \infty)) \cap L_2([0, \infty))$, insbesondere sind die Ausdrücke vom Typ $q_{kl}^j(\cdot)$ endlich. Bezüglich der Beweise von im folgenden aufgeführten Resultaten sei auf [21] verwiesen.

Satz 5.2

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gilt die asymptotische Entwicklung für $\tau \geq 0$

$$R_{zz}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\left\langle q_j(\tau), \mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + \left\langle q_j^*(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_j(\tau) = \int_0^\infty Q(u) Q^{(j)*}(u + \tau) du. \quad (5.4)$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich speziell

$$R_{zz}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\langle q_j(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_j^*(0), \kappa_j \rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Die Entwicklung für $\tau < 0$ wird auch in den Sätzen nicht explizit angegeben. Diese ermittelt man aus der Beziehung

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau).$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion von $z(t, \omega)$ und der Ableitung

$$\dot{z}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q'(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds + Q(0) {}^\varepsilon f(t, \omega)$$

besteht aus zwei Summanden,

$$\begin{aligned} R_{z\dot{z}}(\tau) &= \mathbf{E} \{ z(t) \dot{z}^*(t + \tau) \} \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q(t-u) R_{{}^\varepsilon f {}^\varepsilon f}(v-u) Q'^*(t+\tau-v) dv du \\ &\quad + \int_{-\infty}^t Q(t-u) R_{{}^\varepsilon f {}^\varepsilon f}(t+\tau-u) du Q^*(0) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q(u) R\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) Q'^*(v) dv du + \int_0^\infty Q(u) R\left(\frac{u+\tau}{\varepsilon}\right) du Q^*(0). \end{aligned}$$

Der erste Summand läßt sich nach Satz 5.2 entwickeln, für den zweiten findet man die folgende Darstellung.

Lemma 5.3

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gilt die asymptotische Entwicklung

$$\int_0^\infty Q(u) R\left(\frac{u+\tau}{\varepsilon}\right) du = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \begin{cases} \kappa_{2,j}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) & \tau > 0 \\ \mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^*\left(-\frac{\tau}{\varepsilon}\right) & \tau \leq 0 \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

und speziell für $\tau = 0$

$$\int_0^\infty Q(u) R\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) du = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(0) \kappa_j + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Werden die Entwicklungskoeffizienten mittels partieller Integration zusammengefaßt, folgt die Entwicklung für die Kreuzkorrelationsfunktion von Integralfunktional und dessen Ableitung.

Satz 5.4

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gilt die asymptotische Entwicklung für $\tau \geq 0$

$$R_{z\dot{z}}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\left\langle q_{j+1}(\tau), \mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle - \left\langle q_{j+1}^*(\tau), \kappa_{2,j}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

den Entwicklungskoeffizienten (5.4).

Speziell für $\tau = 0$ gilt

$$R_{z\dot{z}}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\langle q_{j+1}(0), \kappa_j^* \rangle - \langle q_{j+1}^*(0), \kappa_j \rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Analoges Vorgehen für

$$\begin{aligned} R_{\dot{z}\dot{z}}(\tau) &= \mathbf{E} \{ \dot{z}(t) \dot{z}^*(t+\tau) \} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q'(u) R\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) Q'^*(v) dv du + \int_0^\infty Q'(u) R\left(\frac{u+\tau}{\varepsilon}\right) du Q^*(0) \\ &\quad + Q(0) \int_0^\infty R\left(\frac{\tau-u}{\varepsilon}\right) Q'^*(u) du + Q(0) R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) Q^*(0). \end{aligned}$$

führt zu folgendem Ergebnis.

Satz 5.5

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gilt die asymptotische Entwicklung für $\tau \geq 0$

$$R_{zz}(\tau) = - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\left\langle q_{j+2}(\tau), \mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + \left\langle q_{j+2}^*(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] \\ + Q(0) R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q^*(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten (5.4).

Für die Kovarianzmatrix ($\tau = 0$) gilt

$$R_{zz}(0) = Q(0)R(0)Q^*(0) - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\langle q_{j+2}(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{j+2}^*(0), \kappa_j \rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Neben der Abhängigkeit von ε sind die entwickelten Korrelationsfunktionen Funktionen von τ . Nun kann man bei den asymptotischen Entwicklungen unterscheiden, ob diese lediglich punktweise für alle τ oder gleichmäßig bezüglich τ gelten, d. h. ob die Forderungen (5.1) und (5.2) unabhängig von τ erfüllt sind.

Die angegebenen Entwicklungen, z. B. $R_{zz}(\tau) = {}^N R_{zz}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$, gelten für beliebige $N \geq 0$. Nun stellt sich die Frage, ob die formale Reihe, deren Partialsummen durch die Folge der Approximationen $({}^N R_{zz}(\cdot))_{N=0,1,\dots}$ definiert wird, für $N \rightarrow \infty$ gegen die exakte Funktion $R_{zz}(\tau)$ konvergiert.

Die Eigenschaften der asymptotischen Entwicklungen werden in folgendem Satz zusammengefaßt.

Satz 5.6

Für die asymptotischen Entwicklungen von $R_{zz}(\cdot)$, $R_{z\dot{z}}(\cdot)$ und $R_{\dot{z}\dot{z}}(\cdot)$ aus den Sätzen 5.2, 5.4 und 5.5 gilt:

1. Die asymptotischen Entwicklungen gelten gleichmäßig bezüglich τ .
2. Die Folgen der Approximationen konvergieren für alle $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig bezüglich τ gegen die exakten Funktionen.

Beweis.

Für die Restglieder

$$\varrho_1^{N+1}(\tau, \varepsilon) = R_{zz}(\tau) - {}^N R_{zz}(\tau) \\ \varrho_2^{N+1}(\tau, \varepsilon) = R_{z\dot{z}}(\tau) - {}^N R_{z\dot{z}}(\tau) \\ \varrho_3^{N+1}(\tau, \varepsilon) = R_{\dot{z}\dot{z}}(\tau) - {}^N R_{\dot{z}\dot{z}}(\tau)$$

gilt nach [18, 21] die Abschätzung

$$|\varrho_i^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left[2C_{Q(N+i)*} \int_0^\infty |Q(u)| du + C_{Q(N+i)} \int_0^\infty |Q^*(u)| du \right], \quad i = 1, 2, 3,$$

wenn die Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses durch die Konstante C_R beschränkt

$$|R(\tau)| \leq C_R \mathbf{1}_{[-1,1]}(\tau)$$

ist und $C_{Q^{(N)}}$ Schranken für die Ableitungen der Kernfunktion sind,

$$|Q^{(N)}(t)| \leq C_{Q^{(N)}}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad t \in [0, \infty).$$

Dabei bezeichnet $|\cdot|$ für Matrizen eine Matrixnorm, für die gilt $|AB| \leq |A||B|$ und die mit einer Vektornorm $|\cdot|$ verträglich ist, d. h. $|Ax| \leq |A||x|$.

Da die Schranke für das Restglied unabhängig von τ ist, gelten die asymptotischen Entwicklungen gleichmäßig bezüglich τ . Aufgrund der Stabilität der Matrix A und

$$|Q^{(N)}(t)| = |A^N e^{At} P_0| \leq |A|^N |e^{At}| |P_0|$$

existieren Schranken $C_{Q^{(N)}}$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$|\varrho_i^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \rightarrow 0$$

unabhängig von τ folgt. □

Bemerkung 5.7 Betrachtet man die Entwicklung jedoch punktweise, d. h. für feste τ und $\varepsilon \rightarrow 0$, so kann man für $\tau \neq 0$ annehmen, dass $|\tau| \geq \varepsilon$ gilt und die Korrekturterme $\kappa_{0,j}(\frac{\tau}{\varepsilon})$ und $\kappa_{2,j}(\frac{\tau}{\varepsilon})$ verschwinden. Die punktweise Entwicklung ist dann eine Entwicklung in eine Potenzreihe und somit eindeutig, hat aber den Nachteil, dass die Approximationen im Punkt $\tau = 0$ im allgemeinen unstetig sind.

5.2 Der allgemeine Fall $p \geq 0$

Die Modellierung der Erregung $g(t, \omega)$ des linearen Systems (2.1) erfolgt nun mittels eines geeignet oft differenzierbaren ε -korrelierten Prozesses ${}^\varepsilon f(t, \omega)$, d. h.

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k {}^\varepsilon f^{(k)}(t, \omega). \quad (5.5)$$

Verschiedene Ableitungen von ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ sind nach Definition 3.1 zwar ε -korreliert, erfüllen jedoch aufgrund von

$$R_{{}^\varepsilon f^{(k)} {}^\varepsilon f^{(l)}}(\tau) = (-1)^k \varepsilon^{-k-l} R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad k, l = 0, \dots, p, \quad (5.6)$$

nicht gleichzeitig Annahme 3.2, dass die Korrelationsfunktion durch eine 1-korrelierte Korrelationsfunktion erzeugt wird.

Ist $R(\cdot)$ die generierende 1-korrelierte Korrelationsfunktion des Prozesses ${}^\varepsilon f(t, \omega)$, d. h. $R_{{}^\varepsilon f}(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, ergibt sich die Korrelationsfunktion von (5.5)

$$R_{gg}(\tau) = \sum_{k,l=0}^p P_k R_{{}^\varepsilon f^{(k)} {}^\varepsilon f^{(l)}}(\tau) P_l^* = \sum_{k,l=0}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} P_k R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) P_l^*.$$

Zumindest ein Diagonalelement der Korrelationsfunktion $R_{gg}(\tau)$ wächst wenigstens im Punkt $\tau = 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ von der Ordnung ε^{-2p} , wenn die Matrix P_p verschieden von 0 ist.

Bemerkung 5.8 Um eine Korrelationsfunktion $R_{gg}(\tau) = \mathcal{O}(1)$ zu erhalten, multipliziert man die Gleichung (5.6) mit ε^{2p} . Das entspricht einer rechten Seite

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k {}^\varepsilon \tilde{f}^{(k)}(t, \omega)$$

mit ${}^\varepsilon \tilde{f}(t, \omega) = \varepsilon^p {}^\varepsilon f(t, \omega)$. Die Korrelationsfunktion von ${}^\varepsilon \tilde{f}^{(p)}(t, \omega)$ wird dann von der Korrelationsfunktion $(-1)^p R^{(2p)}(\cdot)$ generiert. Die Entwicklungen der Korrelationsfunktionen für diesen alternativen Ansatz erhält man, indem man die angegebenen Formeln mit ε^{2p} multipliziert.

Wenn nicht ausdrücklich erwähnt, soll dieser Ansatz nicht verwendet werden.

Die Sätze 5.2, 5.4 und 5.5 können somit nicht direkt auf die stationäre Lösung $z(t, \omega)$ als Integralfunktional der Funktion $g(t, \omega)$ angewendet werden. In der Darstellung

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} G(t-u) P_k R_{{}^\varepsilon f^{(k)} {}^\varepsilon f^{(l)}}(v-u) P_l^* G^*(t+\tau-v) dv du \\ &= \sum_{k,l=0}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} \int_0^\infty \int_0^\infty G(u) P_k R^{(k+l)}\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) P_l^* G^*(v) dv du \end{aligned}$$

erkennt man, dass sich die Doppelintegrale in den Summanden einzeln entwickeln lassen.

Satz 5.9

Sei ein System (2.1) mit einer Erregung durch ε -korrelierte Prozesse nach (5.5) gegeben.

Dann gelten für alle $N \in \mathbb{N}_0$ die bezüglich τ gleichmäßigen asymptotischen Entwicklungen für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left[(-1)^j \left\langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^{(k+l)} - \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle q_{lk}^{j*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{zz}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left[(-1)^j \left\langle q_{kl}^{j+1}(\tau), \mu_j^{(k+l)} - \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - \left\langle q_{lk}^{j+1*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2}) \\
R_{zz}(\tau) &= \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l \geq 2p-N-1}}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} P_k R^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) P_l^* \\
&\quad - \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left\{ \left[(-1)^j \left\langle q_{kl}^{j+2}(\tau), \mu_j^{(k+l)} - \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\langle q_{lk}^{j+2*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2})
\end{aligned}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_{kl}^j(\tau) = \int_0^\infty (G(u) P_k) (P_l^* G^{(j)*}(u + \tau)) du$$

und die Folgen der Approximationen konvergieren für jedes $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die exakten Funktionen [21].

Nun soll die alternative Darstellung der stationären Lösung entsprechend Lemma 2.1 mit Kernfunktion \tilde{G} nach (2.3) als Grundlage zur Bestimmung der Korrelationsfunktion dienen. Setzt man

$$Q(t) := \sum_{k=0}^p \tilde{G}^{(k)}(t) \tilde{P}_k$$

und

$$Q_k^i := \begin{cases} 0 & 0 \leq i \leq r-p-1 \\ \sum_{j=r-i}^{p-k} \tilde{G}^{(j+i-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} & r-p \leq i \leq r-1 \\ \tilde{P}_k + \sum_{j=1}^{p-k} \tilde{G}^{(j+r-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} & i = r \end{cases}$$

so gilt

$$x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q^{(i)}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds + \sum_{k=0}^{p+i-r} Q_k^i \varepsilon f^{(k)}(t, \omega), \quad i = 0, \dots, r.$$

Die Korrelationsfunktionen haben dann für $i_1, i_2 = 0, \dots, r$ die Gestalt

$$R_{x^{(i_1)} x^{(i_2)}}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty Q^{(i_1)}(u) R\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) Q^{(i_2)*}(v) dv du$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{p+i_2-r} \varepsilon^{-k} \int_0^\infty Q^{(i_1)}(u) R^{(k)} \left(\frac{\tau+u}{\varepsilon} \right) du Q_k^{i_2*} \\
& + \sum_{k=0}^{p+i_1-r} \varepsilon^{-k} (-1)^k Q_k^{i_1} \int_0^\infty R^{(k)} \left(\frac{\tau-u}{\varepsilon} \right) Q^{(i_2)*}(u) du \\
& + \sum_{k=0}^{p+i_1-r} \sum_{l=0}^{p+i_2-r} \varepsilon^{-k-l} (-1)^k Q_k^{i_1} R^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^{i_2*},
\end{aligned}$$

woraus für $\tau \geq 0$ die Reihendarstellung

$$\begin{aligned}
R_{x^{(i_1)}x^{(i_2)}}(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[(-1)^j \left\langle q_{i_1 i_2}^j(\tau), \mu_j - \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + \left\langle q_{i_2 i_1}^{j*}(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] \\
&+ \sum_{k=0}^{p+i_2-r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j-k+1}}{j!} Q^{(i_1+j)}(\tau) \kappa_{2,j}^{(k)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_k^{i_2*} \\
&+ \sum_{k=0}^{p+i_1-r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j-k+1}}{j!} (-1)^{j+k} Q_k^{i_1} \left[\mu_j^{(k)} - \kappa_{0,j}^{(k)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] Q^{(i_2+j)*}(\tau) \\
&+ \sum_{k=0}^{p+i_1-r} \sum_{l=0}^{p+i_2-r} \varepsilon^{-k-l} (-1)^k Q_k^{i_1} R^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^{i_2*},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_{i_1 i_2}^j(\tau) = \int_0^\infty Q^{(i_1)}(u) Q^{(i_2+j)*}(u+\tau) du$$

folgt.

Bemerkung 5.10 Bei dieser einheitlich für alle $i_1, i_2 = 0, \dots, r$ geltenden Darstellung wurde darauf verzichtet, alle Terme mit gleichen ε -Potenzen bis zu einer gewissen Ordnung N und einem Rest $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ zusammenzufassen.

Neben Approximationen und Reihendarstellungen der Korrelationsfunktion bieten die angegebenen asymptotischen Entwicklungen auch die Möglichkeit, die Ordnung der Korrelationfunktion zu spezifizieren. Aus Satz 5.9 liest man zunächst

$$R_{zz}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+1}), \quad R_{z\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+1}) \quad \text{und} \quad R_{\dot{z}\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p})$$

ab. Diese entsprechen gerade der kleinsten ε -Potenz, wenn man bei den weiteren Faktoren in jedem Summand von einer Ordnung $\mathcal{O}(1)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ ausgeht. Mit der Darstellung (5.7) läßt sich die Ordnung konkretisieren.

Korollar 5.11

Für die Korrelationsfunktionen der stationären Lösung des Systems (1.1) mit Erregung

$$\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k \varepsilon f^{(k)}(t, \omega) \text{ gelten die Ordnungen für } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon) & 0 \leq i, j \leq r - p - 1 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{2r-2p-i-j}) & r - p \leq i, j \leq r \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{r-p-j+1}) & 0 \leq i \leq r - p - 1, r - p \leq j \leq r. \end{cases}$$

Der für Schwingungsmodelle interessante Fall $r = p = 2$ führt insbesondere auf

$$R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-i-j}) \text{ für } i, j = 0, \dots, 2.$$

Die Korrelationsfunktionen von $R_{zz}(\cdot)$, $R_{z\dot{z}}(\cdot)$ und $R_{\dot{z}\dot{z}}(\cdot)$ setzen sich aufgrund der Definition von $z(t, \omega)$ aus den Korrelationsfunktionen $R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot)$ zusammen, was bedeutet, dass mit Satz 5.9 und (5.7) zwei verschiedene asymptotische Entwicklungen für $R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot)$ angegeben sind. Dass sich die Ordnungen der Korrelationsfunktionen bezüglich ε unterscheiden, ist kein Widerspruch. Bei der Berechnung von Approximationen entsprechend Satz 5.9 sollte jedoch darauf geachtet werden, dass N mindestens so groß gewählt wird, dass die Ordnung des Fehlers höher ist als die in Korollar 5.11 angegebene Ordnung der zu approximierenden Korrelationsfunktion. So ist z. B. im Fall $r = p = 2$ $R_{xx}(\cdot) = \mathcal{O}(1)$, so dass bei Berechnung von $R_{zz}(\cdot)$ mittels Satz 5.9 eine Wahl von $N \geq 3$ sinnvoll ist.

6 Beispiel

Das einfachste Beispiel eines stochastisch erregten Oszillators ist der in Abbildung 6.1 gezeigte Einmassenschwinger. Er ist Abstraktionsmodell für eine Vielfalt von Anwendungen, insbesondere auch für Fahrzeuge. Ein Fahrzeug mit einer Masse m und einem Fahrwerk mit Dämpfungsparameter c und Federkraftkonstante k bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit über eine zufällige Straßenoberfläche $f(t, \omega)$. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der Masse $m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{f}) + k(y - f) = 0$ führt zu den Bewegungsgleichungen für die Absolutbewegung $y(t, \omega)$

$$\ddot{y} + 2\varrho\theta_0\dot{y} + \theta_0^2 y = 2\varrho\theta_0\dot{f} + \theta_0^2 f$$

und für die Relativbewegung $x(t, \omega)$

$$\ddot{x} + 2\varrho\theta_0\dot{x} + \theta_0^2 x = -\ddot{f},$$

wenn $\theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und $\varrho = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ der Dämpfungsgrad ist. Je nach Wahl des Dämpfungsgrades hat die Systemmatrix A des Systems 1. Ordnung für $0 < \varrho < 1$ ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, für $\varrho = 1$ einen

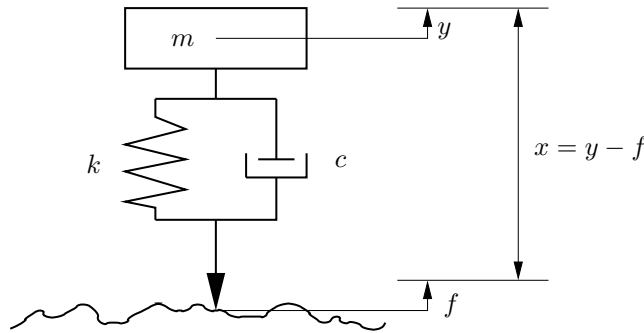


Abbildung 6.1: Einmassenschwinger

doppelten reellen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 1 und für $\varrho > 1$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte. Im Fall eines schwach gedämpften Systems, d. h. $0 < \varrho < 1$, ist

$$\tilde{G}(t) = \frac{1}{\theta_d} e^{-\varrho\theta_0 t} \sin(\theta_d t)$$

mit $\theta_d := \sqrt{1 - \varrho^2} \theta_0$.

Der Einmassenschwinger mit zentrierter schwach stationärer rechter Seite $\tilde{g}(t, \omega)$

$$\ddot{x} + 2\varrho\theta_0\dot{x} + \theta_0^2 x = \tilde{g}(t, \omega)$$

ist Gegenstand der Untersuchungen in [16] (siehe auch [20]). Dort wird gezeigt, dass sich die Korrelationsfunktion der stationären Lösung nach

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q_0(|\tau - u|) R_{\tilde{g}\tilde{g}}(u) du$$

mit

$$q_0(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{G}(u) \tilde{G}(u + \tau) du = \frac{\theta_0^{-3}}{4\varrho\sqrt{1 - \varrho^2}} e^{-\varrho\theta_0\tau} \sin(\theta_d\tau + \varphi_d)$$

berechnen lässt, wobei $\varphi_d := \arccos(\varrho)$ gesetzt wird. Dann ergibt sich $\varrho = \cos(\varphi_d)$ und $\sqrt{1 - \varrho^2} = \sin(\varphi_d)$. Ebenso sind Formeln für die Ableitungen der Korrelationsfunktion angegeben. Bei Kenntnis der Korrelationsfunktion $R_{\tilde{g}\tilde{g}}(\tau)$ ist es möglich, die Korrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ durch (numerische) Integration zu ermitteln.

Im Fall ε -korrelierter Erregung werden für die Entwicklung der Korrelationsfunktion die Funktionen

$$q_j(\tau) = q_0^{(j)}(\tau) = \frac{(-1)^j \theta_0^{j-3}}{4\varrho\sqrt{1 - \varrho^2}} e^{-\varrho\theta_0\tau} \sin(\theta_d\tau - (j - 1)\varphi_d)$$

benötigt.

Berücksichtigt man zunächst nicht, dass der Erregungsprozeß die zweite Ableitung eines differenzierbaren Prozesses ist und nimmt $\tilde{g}(t, \omega) = {}^\varepsilon f(t, \omega)$ an, so ergeben sich die für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gültigen asymptotischen Entwicklungen

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}),$$

$$R_{x\dot{x}}(\tau) = \text{sign}(\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+1}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

mit den zusammengefaßten Korrekturtermen

$$\tilde{\kappa}_j(\alpha) := (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}(\alpha) + \kappa_{2,j}(\alpha),$$

$$\tilde{\tilde{\kappa}}_j(\alpha) := (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}(\alpha) - \kappa_{2,j}(\alpha).$$

Wegen $\tilde{G}(0) = 0$ ist $\dot{x}(t, \omega)$ ein Integralfunktional mit Kernfunktion $\tilde{G}'(\tau)$ und den Entwicklungskoeffizienten

$$\tilde{q}_j(\tau) = \int_0^\infty \tilde{G}'(u) \tilde{G}^{(j+1)}(u + \tau) du = - \int_0^\infty \tilde{G}(u) \tilde{G}^{(j+2)}(u + \tau) du = -q_{j+2}(\tau)$$

und den asymptotischen Entwicklungen

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}),$$

$$R_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau) = \text{sign}(-\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+3}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

und

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = (\tilde{G}'(0))^2 R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+4}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Ist die Erregung eine Ableitung eines differenzierbaren ε -korrelierten Prozesses $\tilde{g}(t, \omega) = {}^\varepsilon f^{(p)}(t, \omega)$ für ein $p \in \mathbb{N}$, sind in den Entwicklungen die Korrelationsmomente μ_j , die Korrekturterme $\tilde{\kappa}_j(\alpha)$ und $\tilde{\tilde{\kappa}}_j(\alpha)$ sowie $R(\cdot)$ durch die entsprechenden Größen der Ableitung ${}^\varepsilon f^{(p)}(t, \omega)$ mit dem Faktor ε^{-2p} zu ersetzen.

Für den beim Einmassenschwinger vorliegenden Fall $p = 2$ sind das die Entwicklungen

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_j(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2}), \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
R_{x\dot{x}}(\tau) &= \text{sign}(\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_{j+1}(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2}), \\
R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) &= - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2}), \\
R_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau) &= \text{sign}(-\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_{j+3}(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2}), \\
R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) &= \varepsilon^{-4} (\tilde{G}'(0))^2 R^{(4)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_{j+4}(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2}),
\end{aligned}$$

die in Abbildung 6.2 für die Parameterkonstellation $\varrho = 0.5$, $\theta_0 = 3$ und $\varepsilon = 1$ mit Korrelationsfunktion $\bar{R}^6(\cdot)$ der Erregung ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ für $N = 0, \dots, 8$ zu sehen sind.

Korollar 5.11 besagt nun, dass die Korrelationsfunktion $R_{xx}(\cdot)$ entsprechend (6.1) von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, d. h. ε^0 ist die kleinste ε -Potenz.

Aus der Darstellung

$$x(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}(t-s) {}^\varepsilon \ddot{f}(s, \omega) ds = \int_{-\infty}^t \tilde{G}''(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds + \tilde{G}'(0) {}^\varepsilon f(t, \omega)$$

als Ableitung eines Integralfunktional folgt die Entwicklung

$$R_{xx}(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) (\tilde{G}'(0))^2 - \sum_{j=0}^{\hat{N}} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \tilde{q}_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\hat{N}+2})$$

entsprechend (5.7), die zum Vergleich in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Für $N = \hat{N} + 4$ haben die Approximationen identische Fehlerordnung. Theoretisch stimmen die punktwisen Approximationen beider Entwicklungen überein (für $\tau = 0$ und $|\tau| \geq \varepsilon$, vgl. Bemerkung 5.7). Mit den Eigenschaften der Korrelationsmomente entsprechend (3.3)

$$\mu_j^{(4)} = \begin{cases} 0 & j = 0, \dots, 3 \\ \frac{j!}{(j-4)!} \mu_{j-4} & j \geq 4 \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_j^{(4)}(0) = \begin{cases} 0 & j = 0, 2 \\ 2R''(0) & j = 1 \\ 12R(0) & j = 3 \\ \frac{j!}{(j-4)!} \tilde{\kappa}_{j-4}(0) & j \geq 4 \end{cases}$$

sowie den Beziehungen

$$q_{j+2}(\tau) = -\tilde{q}_j(\tau), \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad q_1(0) = 0, \quad q_3(0) = -\tilde{q}_1(0) = \frac{1}{2}(\tilde{G}''(0))^2$$

überzeugt man sich leicht davon. Für $0 < |\tau| < \varepsilon$ unterscheiden sich beide asymptotischen Darstellungen, es gilt jedoch aufgrund von

$$\tilde{\kappa}_0^{(4)}(\alpha) = 0, \quad \tilde{\kappa}_1^{(4)}(\alpha) = 2R''(\alpha), \quad \tilde{\kappa}_2^{(4)}(\alpha) = -4\alpha R''(\alpha) \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_3^{(4)}(\alpha) = 6\alpha^2 R''(\alpha) + 12R(\alpha)$$

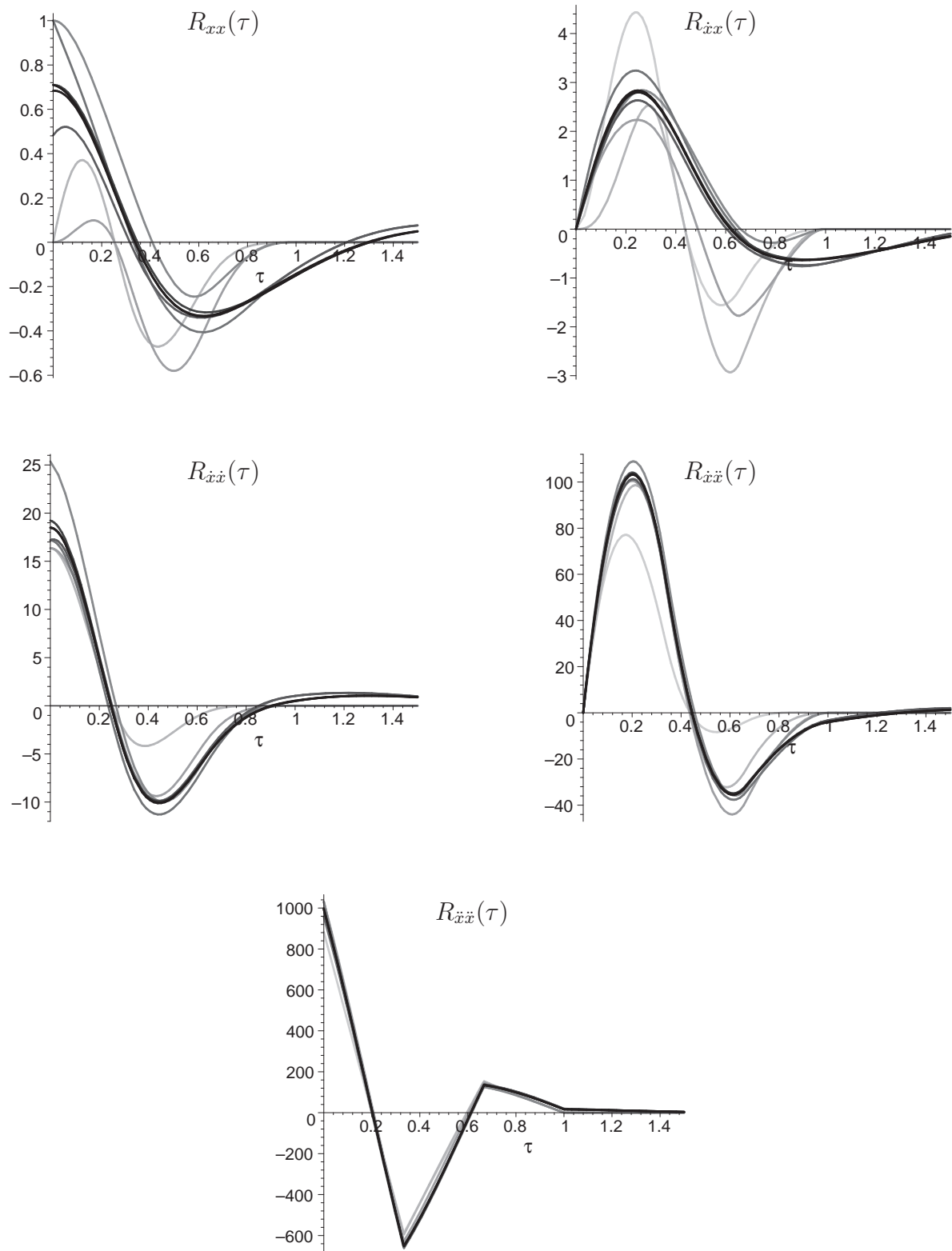


Abbildung 6.2: Approximationen der Korrelationsfunktionen bei Erregung durch zweite Ableitung des Prozesses mit B-Spline-Korrelationsfunktion $\overline{R}^6(\cdot)$ für $\varrho = 0.5$, $\theta_0 = 3$ und $\varepsilon = 1$ für $N = 0, \dots, 8$ (von hell nach dunkel)

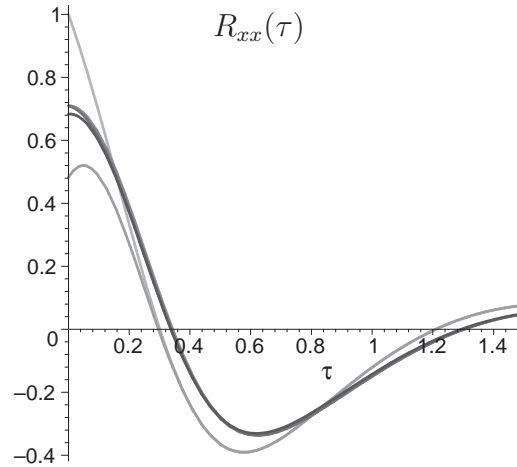


Abbildung 6.3: Alternative Approximationen der Korrelationsfunktion bei Erregung durch zweite Ableitung des Prozesses mit B-Spline-Korrelationsfunktion $\bar{R}^6(\cdot)$ für $\varrho = 0.5$, $\theta_0 = 3$ und $\varepsilon = 1$ für $\hat{N} = 0, \dots, 4$ (von hell nach dunkel)

die bereits gezeigte Ordnung

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^3 \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_j(\tau) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] &= \\
 2\varepsilon^{-2} R'' \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \left(q_2(0)\tau + \frac{q_3(0)}{2}\tau^2 + \frac{q_4(0)}{6}\tau^3 + \dots \right) &+ \\
 - 2\varepsilon^{-2} \tau R'' \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \left(q_2(0) + q_3(0)\tau + \frac{q_4(0)}{2}\tau^2 + \dots \right) &+ \\
 + \left(\left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^2 R'' \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + 2R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right) (q_3(0) + q_4(0)\tau + \dots) &= \\
 = 2R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) q_3(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) = R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) (\tilde{G}'(0))^2 + \mathcal{O}(\varepsilon). &
 \end{aligned}$$

Für das stochastische Verhalten des Systemausgangs ist es wesentlich, den Systemeingang entsprechend der Vorgaben des Modells anzupassen. Dabei spielt insbesondere die Differenzierbarkeit des Eingangsprozesses eine wichtige Rolle. Außerdem sollte für $g(t, \omega) = {}^\varepsilon \ddot{f}(t, \omega)$ auch die zweite Ableitung eines Prozesses gewählt werden, da sonst wichtige Eigenschaften unberücksichtigt bleiben. In den Abbildungen 6.4 und 6.5 werden die Unterschiede verdeutlicht. Dabei sind die exakten Korrelationsfunktionen für die Parameter $\theta_0 = 3$, $\varrho = 0.5$ und $\varepsilon = 1$ zu sehen, die als Grenzwert der Reihendarstellung ($N = \infty$) mittels des Computeralgebrasystems MAPLE 8 bestimmt wurden. Die Erregungsprozesse wurden dabei so normiert, dass die Varianz des Systemausgangs immer gleich ist, $R_{xx}(0) = 1$.

Die Abbildung 6.4 vergleicht die Systemausgänge des Einmassenschwingers bei Erregung durch die p -te Ableitung eines Prozesses mit normierter B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $p + 1$ für $p = 0, \dots, 4$. Im Fall $p \geq 2$ ist dann die Erregung wirklich die zweite Ableitung eines zweimal differenzierbaren Prozesses ${}^\varepsilon f^{(p-2)}(t, \omega)$.

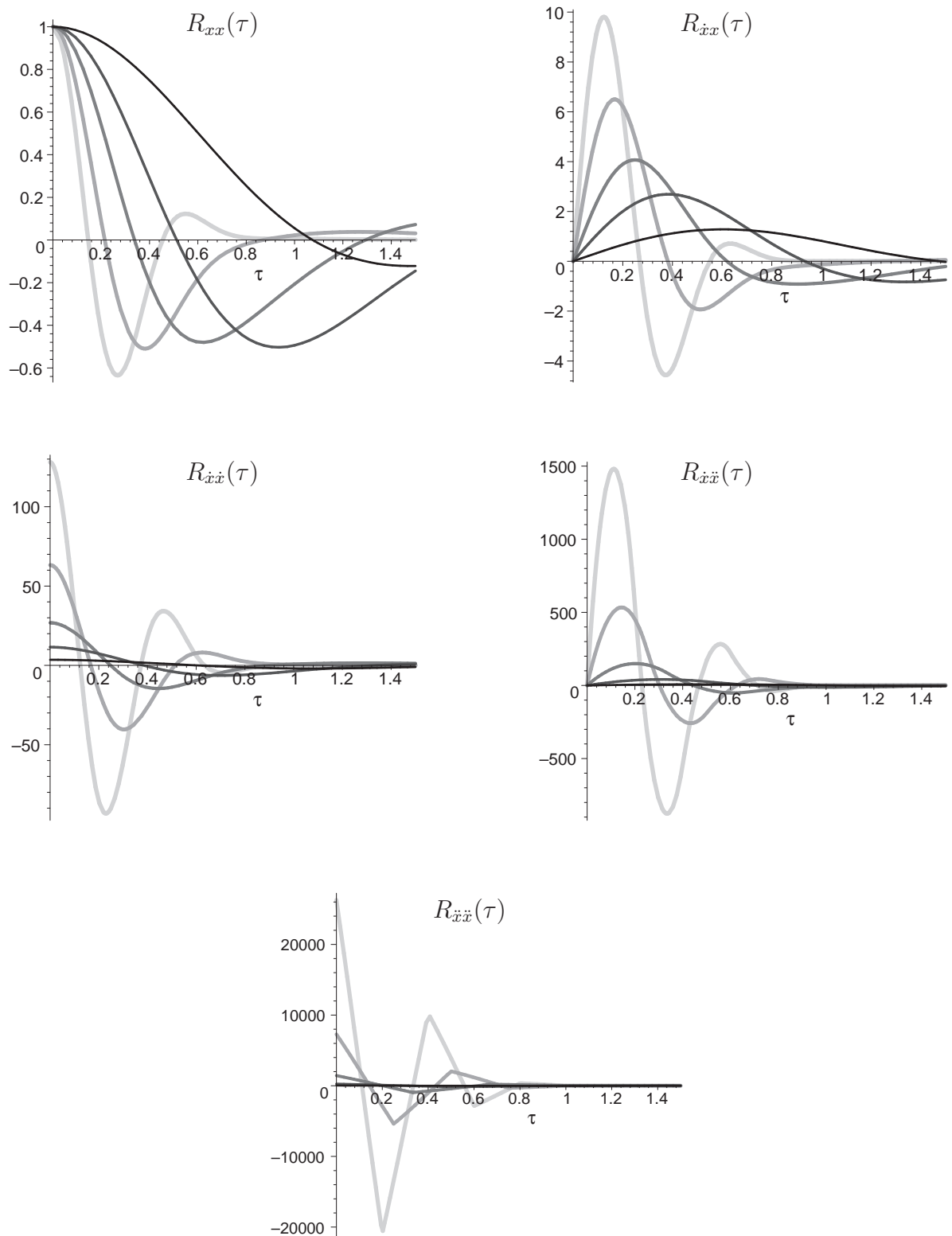


Abbildung 6.4: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch p -te Ableitung der Prozesse mit B-Spline-Korrelationsfunktion R^{2p+2} für $\varepsilon = 1$ und $p = 0, \dots, 4$ (von dunkel nach hell)

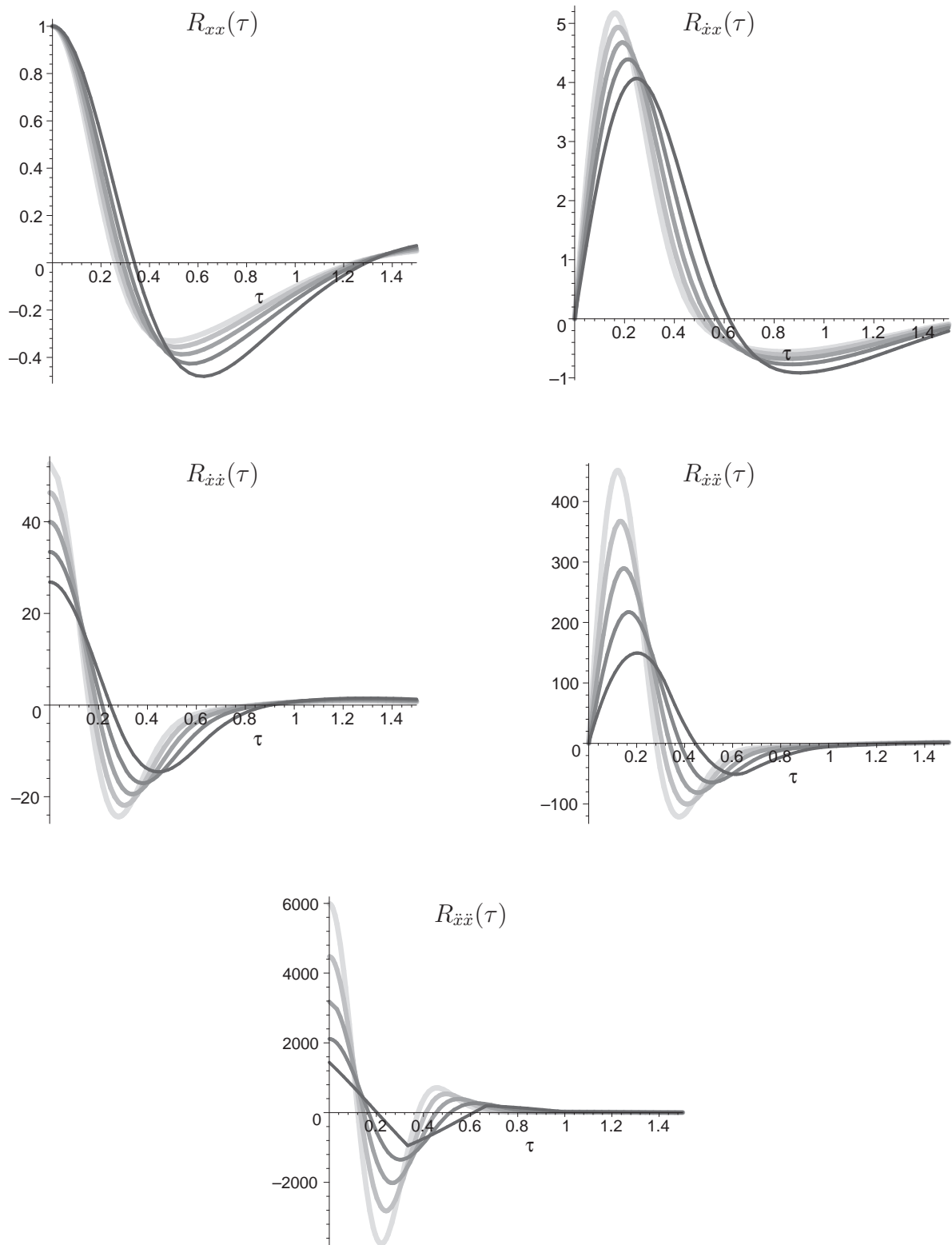


Abbildung 6.5: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch 2. Ableitung der Prozesse mit B-Spline-Korrelationsfunktion R^{2k+2} für $\varepsilon = 1$ und $k = 2, \dots, 6$ (von dunkel nach hell)

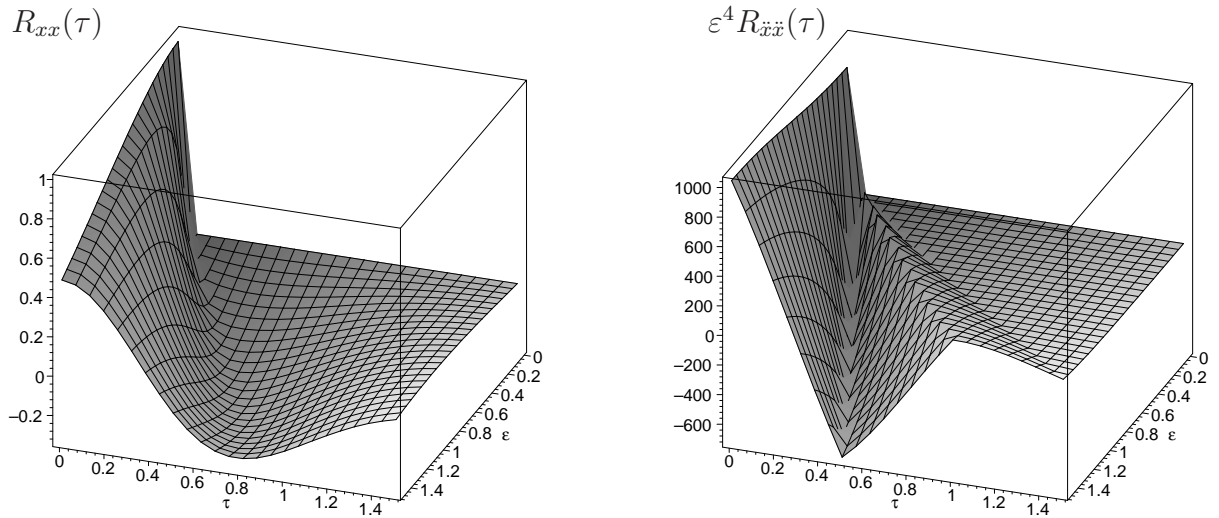


Abbildung 6.6: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch 2. Ableitung des Prozesses mit Korrelationsfunktion $\bar{R}^6(\cdot)$, $\varrho = 0.5$, $\theta_0 = 3$ und $0 \leq \varepsilon \leq 1.5$

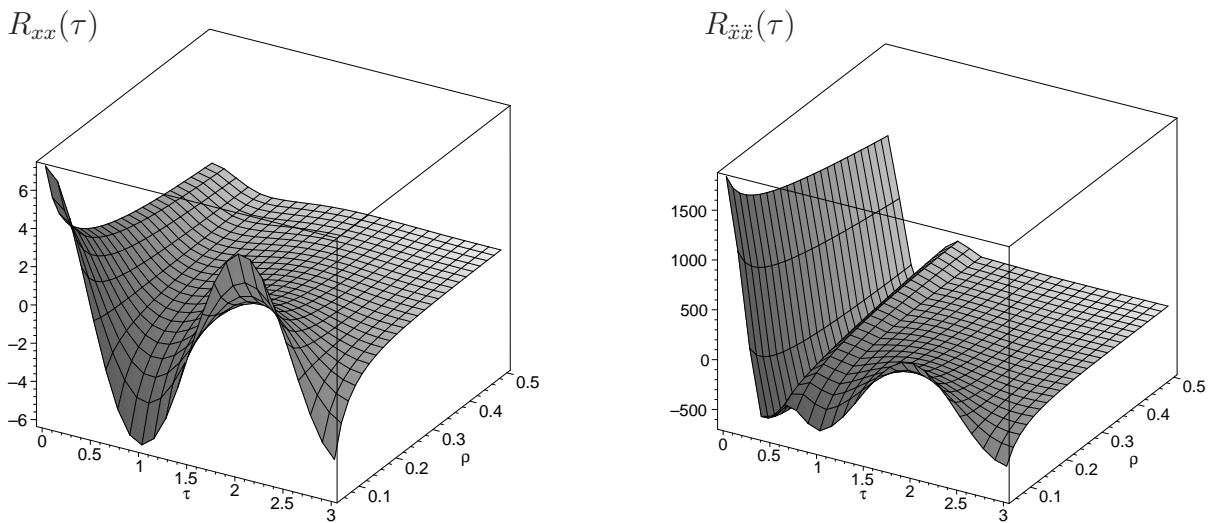


Abbildung 6.7: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch 2. Ableitung des Prozesses mit Korrelationsfunktion $\bar{R}^6(\cdot)$, $\theta_0 = 3$, $\varepsilon = 1$ und $0.05 \leq \varrho \leq 0.5$

In der Abbildung 6.5 ist nun der Fall dargestellt, dass die Erregung $\varepsilon \ddot{f}(t, \omega)$ gerade die zweite Ableitung eines Prozesses mit B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $k + 1$ für $k = 2, \dots, 6$ ist. Mit wachsendem k nimmt auch die Differenzierbarkeit der Erregung zu, was insbesondere für die Ableitungen des Systemausgangs Folgen hat.

Der Einfluß der Parameter ε , ϱ und θ_0 wird in den Abbildungen 6.6, 6.7 und 6.8 verdeutlicht. Hierbei sind immer die Approximaionen für $N = 12$ abgebildet.

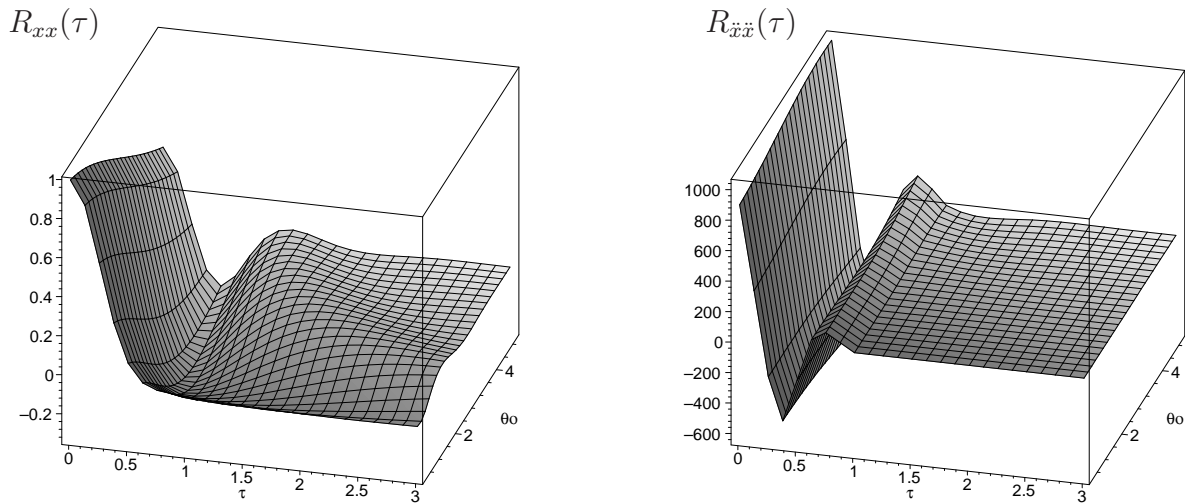


Abbildung 6.8: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch 2. Ableitung des Prozesses mit Korrelationsfunktion $\overline{R}^6(\cdot)$, $\varrho = 0.5$, $\varepsilon = 1$ und $0.5 \leq \theta_0 \leq 5$

Literatur

- [1] V. I. Arnol'd. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991.
- [2] L. Berg. *Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [3] C. de Boor. *Splinefunktionen*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [4] H. Bunke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [5] R. Estrada, R. P. Kanwal. *Asymptotic Analysis: a distributional approach*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [6] B. Fellenberg, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Approximation of stationary random functions with fractional rational spectral density. *Preprint 1999-1*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1999.
- [7] B. W. Gnedenko. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [8] A. Preumont. *Random vibration an spectral analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [9] M. Richter. Wahrscheinlichkeitstheoretisches Verhalten der Lösungen stochastischer Randwertprobleme. *Dissertation*, TU Chemnitz, 1999.
- [10] L. L. Schumaker. *Spline functions: basic theorie*. Krieger publishing company, Malabar, 1993.

-
- [11] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
 - [12] J. vom Scheidt, W. Purkert. *Random Eigenvalue Problems*. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.
 - [13] J. vom Scheidt, B. Fellenberg, U. Wöhl. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
 - [14] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic Expansions of Integral Functionals of Weakly Correlated Random Processes. *Journal for Analysis and its Applications*, **19**, No. 1, 255-268, 2000.
 - [15] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Low-dimensional approximations for large-scale systems of random ODEs. *Dynamic Systems and Applications*, **11**, 143-166, 2002.
 - [16] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Remarks on Randomly Excited Oscillators. *ZAMM*, **82**, 847-859, 2002.
 - [17] J. vom Scheidt, H. Weiß. Korrelationsanalyse bei Schwingungsmodellen. In J. vom Scheidt, Hrsg., *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 29.09.2003 – 01.10.2003*, S. 217-236, Chemnitz, 2004.
 - [18] J. vom Scheidt, H. Weiß. Asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitung von Integralfunktionalen schwach korrelierter Funktionen. In J. vom Scheidt, Hrsg., *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 27.09.2004 – 29.09.2004*, S. 297-324, Chemnitz, 2005.
 - [19] T. T. Soong, M. Grigoriu. *Random vibration of mechanical and structural systems*. PTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1993.
 - [20] H.-J. Starkloff. Higher order asymptotic expansions for weakly correlated random functions. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 2004.
 - [21] H. Weiß. Asymptotische Entwicklungen zur Analyse stochastisch erregter Schwingungssysteme. *Dissertation*, TU Chemnitz, 2006.
 - [22] R. Wunderlich. Systems of random differential equations and model reduction. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 1999.